# □43□ □□□□□

1□□□□□ $f(x)=-x\ln x+ax$ □ $(0,e)$ □□□□□□□□ $g(x)=|e^x-a|+\frac{a^2}{2}$ □□ $x\in[0$ □ $\ln3]$ □□□□ $g(x)$ □□□□ $M$ □□□□ $m$ □□

□ $\frac{3}{2}$ □□ $a$ □□

□□□□□□□□□□ $f(x)=-x\ln x+ax$ □ $(0,e)$ □□□□□□

□□ $f'(x)=a-1-\ln x\geqslant 0$ □ $(0,e)$ □□□□□□ $a-2\geqslant 0$ □□ $a\geqslant 2$ □

□□ $g(x)=|e^x-a|+\frac{a^2}{2}=\begin{cases} a-e^x+\frac{a^2}{2}, 0\leqslant x\leqslant \ln a \\ e^x-a+\frac{a^2}{2}, x\geqslant \ln a \end{cases}$ □

□ $\ln a\geqslant \ln3$ □□ $a\geqslant 3$ □□ $g(x)$ □ $[0$ □ $\ln3]$ □□□□□

□ $M-m=g(0)-g(\ln3)=2$ □□ $)$ □

□ $\ln a<\ln3$ □□ $2\leqslant a<3$ □□□□ $g(x)$ □ $[0$ □ $\ln a]$ □□□□□ $[\ln a$ □ $\ln3]$ □□□□

□ $g(0)-g(\ln3)=2a-4\geqslant 0$ □□□ $M-m=g(0)-g(\ln a)=\frac{3}{2}$ □

□ $(a-1+\frac{a^2}{2})-\frac{a^2}{2}=a-1=\frac{3}{2}$ □

□□ $a=\frac{5}{2}$ □

□□□ $A$ □

2□□□ $a\geqslant 1$ □ $f(x)=x^2+3|x-a|$ □□□□ $f(x)$ □ $[-1$ □ $1]$ □□□□□□□□□□□□□□ $M$ □ $m$ □□ $M-m$ □□

□□□□□□ $a\geqslant 1$ □ $x\in[-1$ □ $1]$ □

$\therefore x-a\leqslant 0$ □

∴ $f(x)=x^3+3|x-a|=x^3-3x+3a$□

∴ $f'(x)=3x^2-3$□

□ $x\in[-1$□$1]$□□ $f'(x)\leq 0$□□□□

□□□ $f(x)$ □$[-1$□$1]$□□□□□□

□ $M-m=f(-1)-f$□1□$=-1+3+3a-(1-3+3a)=4$□

□□□ $C$□

3□□□□□ $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$ □

□I□□□□ $y=f(x)$ □□□□1 □□□□□□

□II□□ $x\in[-2$□$4]$□□□□□ $x-6\leq f(x)\leq x$□

□III□□ $F(x)=|f(x)-(x+a)|(a\in R)$□□ $F(x)$ □□□$[-2$□$4]$□□□□□□ $M$□a□□□ $M$□a□□□□□□ $a$□□□

□□□□□□□I□ $f'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x+1$ □

□ $f'(x)=1$□ $x(x-\frac{8}{3})=0$ □

□ $x_1=0,x_2=\frac{8}{3}$□

□ $f(0)=0$□ $f(\frac{8}{3})=\frac{8}{27}$□

∴ $y=x$□ $y-\frac{8}{27}=x-\frac{8}{3}$□

□ $y=x$□ $y=x-\frac{64}{27}$□

□II□□□□□□ $x-6\leq f(x)\leq x$□

□□□ $-6\leq f(x)-x\leq 0$□

令 $g(x)=f(x)-x=\frac{1}{4}x^3-x^2$，$x\in[-2,4]$，

则 $g'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x=\frac{3}{4}x(x-\frac{8}{3})$，

可知 $g'(x)$ 在 $[-2,0]$，为正，在 $(0,\frac{8}{3})$ 为负，在 $[\frac{8}{3},4]$ 为正，

∴ $g(x)$ 在 $[-2,0]$，递增，在 $[0,\frac{8}{3}]$，递减，在 $[\frac{8}{3},4]$ 递增，

又 $g(-2)=-6$，$g(0)=0$，$g(\frac{8}{3})=-\frac{64}{27}>-6$，$g(4)=0$，

∴ $-6\le g(x)\le 0$，

∴ $x-6\le f(x)\le x$；

（Ⅲ）由（Ⅱ）可得，

$F(x)=|f(x)-(x+a)|$

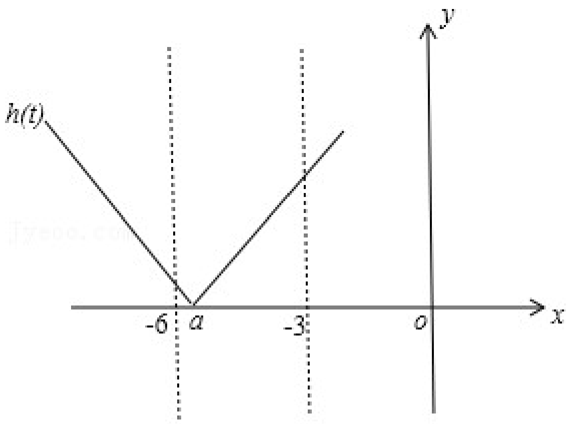
$=|f(x)-x-a|$

$=|g(x)-a|$

∵ 在 $[-2,4]$ 上，$-6\le g(x)\le 0$，

令 $t=g(x)$，$h(t)=|t-a|$，

则问题转化为当 $t\in[-6,0]$ 时，$h(t)$ 的最大值 $M(a)$ 的问题了，




① 当 $a\le -3$ 时，$M(a)=h(0)=|a|=-a$，

□□$-a\geq 3$□□$a=-3$□□$M$□a□□□□□□3□

② □$a\geq -3$□□$M$□a□$=h(-6)=|-6-a|=|6+a|$□

□ $6+a\geq 3$□$\therefore M$□a□$=6+a$□

□□$a=-3$□□$M$□a□□□□3□

□□□□$M$□a□□□□□□□$a$□□□$-3$□

4□□□$a\in R$□□□$f(x)=x^3-3x^2+3ax-3a+3$□

□1□□□□$y=f(x)$□□$(1$□$f$□1□$)$□□□□□□

□2□□$x\in[0$□$2]$□□□$|f(x)|$□□□□□

□□□□□□1□□□$f(x)=x^3-3x^2+3ax-3a+3$□□□$f'(x)=3x^2-6x+3a$□

□$f'$□1□$=3a-3$□□$f$□1□$=1$□□□□□□□□□□□$y=(3a-3)x-3a+4$□

□2□□□$f'(x)=3(x-1)^2+3(a-1)$□$0\leq x\leq 2$□

□□$a\leq 0$□□□$f'(x)\leq 0$□□□$f(x)$□$[0$□$2]$□□□□□□□

$|f(x)|_{max}=max\{|f(0)|$□$|f$□2□$|\}=3-3a$□

□$a\geq 1$□□□$f'(x)\geq 0$□□□$f(x)$□$[0$□$2]$□□□□□□□

$|f(x)|_{max}=max\{|f(0)|$□$|f$□2□$|\}=3a-1$□

□$0<a<1$□□□$3(x-1)^2+3(a-1)=0$□□$x_1=1-\sqrt{1-a}$□$x_2=1+\sqrt{1-a}$□

□□□□$x\in(0,x_1)$□□$f'(x)>0$□□□$f(x)$□□□□□

□$x\in(x_1$□$x_2)$□□$f'(x)<0$□□□$f(x)$□□□□□

□$x\in(x_2$□$2)$□□$f'(x)>0$□□□$f(x)$□□□□□

□□□□ $f(x)$ □□□□ $f(x_1)=1+2(1-a)\sqrt{1-a}$ □□□□ $f(x_2)=1-2(1-a)\sqrt{1-a}$ □

□ $f(x_1)+f(x_2)=2>0$ □ $f(x_1)-f(x_2)=4(1-a)\sqrt{1-a}>0$ □

□□ $f(x_1)>|f(x_2)|$ □

□□ $|f(x)|_{max}=max\{f(0)$ □ $|f$ □2□ $|$ □ $f(x_1)\}$ □

□ $0<a<\frac{2}{3}$ □□ $f(0)>|\ \ $ □2□ $|$ □

□ $f(x_1)-f(0)=2(1-a)\sqrt{1-a}-(2-3a)=\frac{a^2(3-4a)}{2(1-a)\sqrt{1-a}+2-3a}>0$

□ $|f(x)|_{max}=f(x_1)=1+2(1-a)\sqrt{1-a}$ □

□ $\frac{2}{3}\leq a<1$ □□ $|f$ □2□ $|=f$ □2□□□ $f$ □2□ $\geq f(0)$ □

□ $f(x_1)-|f(2)|=2(1-a)\sqrt{1-a}-(3a-2)=\frac{a^2(3-4a)}{2(1-a)\sqrt{1-a}+3a-2}$ □

□□□ $\frac{2}{3}\leq a<\frac{3}{4}$ □□ $f(x_1)>|f$ □2□ $|$ □

□ $f(x)_{max}=f(x_1)=1+2(1-a)\sqrt{1-a}$ □

□ $\frac{3}{4}\leq a<1$ □□ $f(x_1)\leq|f$ □2□ $|$ □

□ $f(x)_{max}=|f$ □2□ $|=3a-1$ □

□□□□ $$|f(x)|_{max}=\begin{cases}3-3a, & a\leq 0\\ 1+2(1-a)\sqrt{1-a}, & 0<a<\frac{3}{4}\\ 3a-1, & a\geq\frac{3}{4}\end{cases}$$ □

5□□□□ $f(x)=a\cos2x+(a-1)(\cos x+1)$ □□□ $a>0$ □□ $|f(x)|$ □□□□□ $A$ □

□Ⅰ□□ $f'(x)$□

□Ⅱ□□ $A$□

□Ⅲ□□□□ $|f'(x)|\leqslant 2A$□

□□□□ $(I)$ □□ $f'(x)=-2a\sin 2x-(a-1)\sin x$□

$(II)$□ $a\geqslant 1$□ □

$|f(x)|=|a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)|\leqslant a|\cos 2x|+(a-1)|(\cos x+1)|\leqslant a|\cos 2x|+(a-1)(|\cos x|+1)|\leqslant a+2(a-1)=3a-2=f(0)$□ □ □

$A=3a-2$□

□ $0<a<1$□□ $f(x)=a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)=2a\cos^2 x+(a-1)\cos x-1$□

□ $g(t)=2at^2+(a-1)t-1$□

□ $A$□ $|g(t)|$□ $[-1$□ $1]$□□□□□ $g(-1)=a$□ $g$□1□ $=3a-2$□

□□ $t=\frac{1-a}{4a}$ □□ $g(t)$ □□□□□□□□□ $g(\frac{1-a}{4a})=-\frac{(a-1)^2}{8a}-1=-\frac{a^2+6a+1}{8a}$ □□□□□□□□□□□□□□□□

□ $-1<\frac{1-a}{4a}<1$ □□ $a<-\frac{1}{3}$ □□ ) □ $a>\frac{1}{5}$□

①□ $0<a\leqslant\frac{1}{5}$ □□ $g(t)$ □ $(-1,1)$ □□□□□ $|g(-1)|=a$□ $|g$□1□ $|=2-3a$□ $|g(-1)|<|g$□1□ $|$□

$\therefore A=2-3a$□

②□ $\frac{1}{5}<a<1$ □□□ $g(-1)-g$□1□ $=2(1-a)>0$□□ $g(-1)>g$□1□ $>g(\frac{1-a}{4a})$□

□ $|g(\frac{1-a}{4a})|-|g(-1)|=\frac{(1-a)(1+7a)}{8a}>0$□

$\therefore A=|g(\frac{1-a}{4a})|=\frac{a^2+6a+1}{8a}$□

□□□ $A=\begin{cases}2-3a, & 0<a\le\frac{1}{5}\\ \frac{a^2+6a+1}{8a}, & \frac{1}{5}<a<1\\ 3a-2, & a\ge 1\end{cases}$ □

$(III)$ □□□□ $(I)$ □□□ $|f'(x)|=|-2a\sin 2x-(a-1)\sin x|\le 2a+|a-1|$ □

□ $0<a\le\frac{1}{5}$ □□ $|f'(x)|\le 1+a\le 2-4a<2(2-3a)=2A$ □

□ $\frac{1}{5}<a<1$ □□ $A=\frac{a^2+6a+1}{8a}=\frac{a}{8}+\frac{1}{8a}+\frac{3}{4}>1$ □

$\therefore |f'(x)|\le 1+a\le 2A$ □

□ $a\ge 1$ □□ $|f'(x)|\le 3a-1\le 6a-4=2A$ □

□□□ $|f'(x)|\le 2A$ □

6□□ $a$ □□□□□ $f(x)=(x-a)^2+|x-a|-a(a-1)$ □

□1□□ $f(0)\le 1$ □□ $a$ □□□□□

□2□□□ $f(x)$ □□□□

□3□□ $a\ge 2$ □□□ $f(x)+\frac{4}{x}$ □□□ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□□□□□□1□□ $f(0)\le 1$ □□□ $a^2+|a|-a(a-1)\le 1$ □□□ $|a|+a-1\le 0$ □

□ $a\ge 0$ □□ $a\le\frac{1}{2}$ □□□ $a\in[0$ □ $\frac{1}{2}]$ □

□ $a<0$ □□ $|a|+a-1\le 0$ □□□□□

□□ $a\le\frac{1}{2}$ □

$\therefore a$ □□□□□□ $(-\infty,\frac{1}{2}]$ □

□2□□□ $f(x)=\begin{cases}x^2-(2a+1)x+2a, & x<a\\ x^2+(1-2a)x, & x\geq a\end{cases}=\begin{cases}[x-(a+\frac{1}{2})]^2-\frac{(2a-1)^2}{4}, & x<a\\ [x-(a-\frac{1}{2})]^2-\frac{(2a-1)^2}{4}, & x\geq a\end{cases}$ □

□ $x<a$ □□□□ $f(x)$ □□□□□□ $x=\frac{2a+1}{2}=a+\frac{1}{2}>a$ □

$y=f(x)$ □ $(-\infty,a)$ □□□□□□

□ $x\geq a$ □□□□ $f(x)$ □□□□□□ $x=\frac{2a-1}{2}=a-\frac{1}{2}<a$ □

$y=f(x)$ □ $(a,+\infty)$ □□□□□□

□3□ $F(x)=f(x)+\frac{4}{x}=\begin{cases}x^2-(2a+1)x+\frac{4}{x}+2a, & x<a\\ x^2+(1-2a)x+\frac{4}{x}, & x\geq a\end{cases}$ □

$$F'(x)=\begin{cases}2x-(2a+1)-\frac{4}{x^2}=\frac{2x^3-(2a+1)x^2-4}{x^2}, & x<a\\ 2x+(1-2a)-\frac{4}{x^2}=\frac{2x^3+(1-2a)x^2-4}{x^2}, & x\geq a\end{cases}$$ □

□ $x<a$ □□ $F'(x)=\frac{2x^3-(2a+1)x^2-4}{x^2}=\frac{2x^2(x-a)-(x^2+4)}{x^2}<0$ □

□□□□□ $F(x)$ □ $(0,a)$ □□□□□□

□ $x\geq a$ □□□□ $a\geq 2$ □□□□ $F'(x)=\frac{2x^3+(1-2a)x^2-4}{x^2}=\frac{2x^2(x-a)+(x^2-4)}{x^2}\geq 0$ □

□□□□□ $F(x)$ □ $(a,+\infty)$ □□□□□□

$F$□a□ $=a-a^2+\frac{4}{a}$ □□ $a=2$ □□ $F$□2□ $=0$ □□□ $F(x)$ □□□□□□□ $a>2$ □□ $F$□a□ $=a-a^2+\frac{4}{a}$ □

$F'$□a□ $=1-2a-\frac{4}{a^2}=\frac{-2a^3+a^2-4}{a^2}=\frac{a^2(1-a)-(a^3+4)}{a^2}<0$ □

□□ $F(a)$ □ $(2,+\infty)$ □□□□□□

□□$F$（a）$< F(2)=2-2^2+\frac{4}{2}=0$ □□$F$（a）$<0$□

□$x>0$□$x\to 0$□□$F(x)\to+\infty$□□$x\to+\infty$□□$F(x)\to+\infty$□□□□□$F(x)$□□□□□□

□□□□□□$a=2$□□$F(x)$□□□□□□$a>2$□$F(x)$□□□□□□

7□□$a$□□□□□□$f(x)=(x-a)^2+|x-a|-a(a-1)$□

□1□□ $f(0)\leqslant 1$□□$a$□□□□□□

□2□□□ $f(x)$ □□□□□

□3□□$a>2$□□□□$f(x)+|x|$□$R$□□□□□□□

□□□□□□1□□ $f(0)\leqslant 1$

$\therefore f(0)=(0-a)^2+|x-a|-a(a-1)=a^2+|a|-a(a-1)=|a|+a\leqslant 1$

$\therefore$□$a\leqslant 0$□□□□□□$0\leqslant 1$□□□□□□□□□□

□$a>0$□□□□□□$a+a\leqslant 1$□

$\therefore 0<a\leqslant\frac{1}{2}$□

□□□□$a$□□□□□□$(-\infty$□$\frac{1}{2}]$□

□2□□$x<a$□□□□$f(x)=x^2-(2a+1)x+2a$□

□□□□□$x=\frac{2a+1}{2}=a+\frac{1}{2}>a$□□□$y=f(x)$□$(-\infty,a)$□□□□□□

□$x\geqslant a$□□$f(x)=x^2+(1-2a)x$□

□□□□□□$x=a-\frac{1}{2}<a$□$y=f(x)$□$(a,+\infty)$□□□□□□

□□□□□$f(x)$□$(a,+\infty)$□□□□□□□$(-\infty,a)$□□□□□□

□3□□ $g(x)=f(x)+|x|=\begin{cases}x^2+(2-2a)x, x\geq a\\ x^2-2ax+2a, 0\leq x<a\\ x^2-(2a+2)x+2a, x<0\end{cases}$□

□$x\geq a$□□□□□□□$x=a-1$□

□$0\leq x<a$□□□□□□□$x=a$□

□$x<0$□□□□□□□$x=a+1$□

$\therefore g(x)$□$(-\infty,0)$□□□□□□□$(0,a)$□□□□□□□$(a,+\infty)$□□□□□

□ $g(0)=2a>0$□$g$□a□$=a^2+(2-2a)a=2a-a^2=-(a-1)^2+1$□

□$a>2$□

$\therefore g$□a□$=-(a-1)^2+1$□$(2,+\infty)$□□□□□

$\therefore g$□a□$<g$□2□$=0$□

$\therefore f(x)$□$(0,a)$□$(a,+\infty)$□□□□□□□

□□□□$a>2$□□$f(x)+|x|$□$R$□□2□□□□

8□□□□□$f(x)=x^2+3|x-a|(a\in R)$□

□I□□$f(x)$□$[-1$□$1]$□□□□□□□□□□□□□$M$□a□□$m$□a□□□$M$□a□$-m$□a□□

□II□□$b\in R$□□$[f(x)+b]^2\leq 4$□$x\in[-1$□$1]$□□□□□$3a+b$□□□□□

□□□□□□□I□ □ $f(x)=x^2+3|x-a|=\begin{cases}x^2+3x-3a, x\geq a\\ x^2-3x+3a, x<a\end{cases}$□

$\therefore f'(x)=\begin{cases}3x^2+3, x\geq a\\ 3x^2-3, x<a\end{cases}$□

① $a\leq -1$□□ □ $-1\leq x\leq 1$□$\therefore x\geq a$□$f(x)$□$(-1,1)$□□□□□

$\therefore M$□a□$=f$□1□$=4-3a$□$m$□a□$=f(-1)=-4-3a$□

∴ $M$□a□ $-m$□a□ $=8$□

② $-1<a<1$□□ $x\in(a,1)$□ $f(x)=x^3+3x-3a$□□ $(a,1)$□□□□□ $x\in(-1,a)$□ $f(x)=x^3-3x+3a$□□ $(-1,a)$□□□□□

∴ $M$□a□ $=max\{f$□1□□ $f(-1)\}$□ $m$□a□ $=f$□a□ $=a^3$□

□ $f$□1□ $-f(-1)=-6a+2$□

∴ $-1<a\le\frac{1}{3}$□□ $M$□a□ $-m$□a□ $=-a^3-3a+4$□

$\frac{1}{3}<a<1$□□ $M$□a□ $-m$□a□ $=-a^3+3a+2$□

③ $a\ge1$□□□ $x\le a$□ $f(x)$□ $(-1,1)$□□□□□

∴ $M$□a□ $=f(-1)=2+3a$□ $m$□a□ $=f$□1□ $=-2+3a$□

∴ $M$□a□ $-m$□a□ $=4$□

□II□□ $h(x)=f(x)+b$□□ $h(x)=\begin{cases}x^3+3x-3a+b, & x\ge a\\ x^3-3x+3a+b, & x<a\end{cases}$□ $h'(x)=\begin{cases}3x^2+3, & x\ge a\\ 3x^2-3, & x<a\end{cases}$□

□ $[f(x)+b]^2\le4$□ $x\in[-1$□ $1]$□□□

∴ $-2\le h(x)\le2$□ $x\in[-1$□ $1]$□□□

□□I□□□

① $a\le-1$□□ $h(x)$□ $(-1,1)$□□□□□□□□□ $h$□1□ $=4-3a+b$□□□□ $h(-1)=-4-3a+b$□□ $-4-3a+b\ge-2$□

$4-3a+b\le2$□□□

② $-1<a\le\frac{1}{3}$□□□□□ $h$□a□ $=a^3+b$□□□□ $h$□1□ $=4-3a+b$□ ∴ $a^3+b\ge-2$□ $4-3a+b\le2$□

□ $t$□a□ $=-2-a^3+3a$□□ $t'$□a□ $=3-3a^2>0$□ $t$□a□□ $(\frac{1}{3}$□ $1)$□□□□□ ∴ $t$□a□ $>t(0)=-2$□

∴ $-2\le3a+b\le0$□

③ $\frac{1}{3}<a<1$ □□□□□ $h$□a□ $=a^3+b$ □□□□ $h(-1)=3a+b+2$ □□ $a^3+b\geq -2$ □ $3a+b+2\leq 2$ □ $\therefore -\frac{28}{27}<3a+b\leq 0$ □

④ $a\geq 1$ □□□□□ $h(-1)=3a+b+2$ □□□□ $h$□1□ $=3a+b-2$ □□ $3a+b-2\geq -2$ □ $3a+b+2\leq 2$ □ $\therefore 3a+b=0$ □

□□□ $3a+b$ □□□□□□ $-2\leq 3a+b\leq 0$ □

9□□□□ $f(x)=x^2-ax+b$ □

□I□□□□□ $f(\sin x)$ □ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ □ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□II□□ $f_0(x)=x^2-a_0x+b_0$ □□□□ $|f(\sin x)-f_0(\sin x)|$ □ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ □□□□□□ $D$ □

□III□□□II□□□□ $a_0=b_0=0$ □□ $z=b-\frac{a^2}{4}$ □□□□ $D\leq 1$ □□□□□□

□□□□□□□I□□ $t=\sin x$ □□ $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ □ □□□

□□ $f(t)=t^2-at+b(-1<t<1)$ □ $f'(t)=2t-a$ □

① □ $a\geq 2$ □□ $f'(t)\leq 0$ □ $f(t)$ □□□□ $f(\sin x)$ □□□

□ $a\leq -2$ □□ $f'(t)\geq 0$ □ $f(t)$ □□□□ $f(\sin x)$ □□□

□□ $a\geq 2$ □ $a\leq -2$ □□□□□□□□

② □ $-2<a<2$ □□ $-1<t<\frac{a}{2}$ □ $f'(t)<0$ □ $f(\sin x)$ □□□

$\frac{a}{2}<t<1$ □ $f'(t)>0$ □ $f(\sin x)$ □□□

$f(\sin x)$ □□□□ $f(\frac{a}{2})=b-\frac{a^2}{4}$ □

□II□ $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ □□ $|f(\sin x)-f_0(\sin x)|=|(a-a_0)\sin x+b-b_0|\leq|a-a_0|+|b-b_0|$

□ $(a-a_0)(b-b_0)\geq 0$ □□□ $x=\frac{\pi}{2}$ □□□□□□

□$(a-a_0)(b-b_0)\leqslant 0$□□□ $x=-\frac{\pi}{2}$ □□□□□□

□□□□□ $|f(\sin x)-f_0(\sin x)|$□$[-\frac{\pi}{2}$□$\frac{\pi}{2}]$□□□□□□ $D=|a-a_0|+|b-b_0|$□

□III□ $D\leqslant 1$□□ $|a|+|b|\leqslant 1$□□□ $0\leqslant a^2\leqslant 1$□$-1\leqslant b\leqslant 1$□□□ $z=b-\frac{a^2}{4}\leqslant 1$

□$a=0$□$b=1$□□ $|a|+|b|\leqslant 1$□□□ $z=b-\frac{a^2}{4}=1$□

□□□□□ $z=b-\frac{a^2}{4}$ □□□□ $D\leqslant 1$□□□□□1□

10□□□□□ $f(x)=x^2+3|x-a|(a\in R)$□

□I□□ $f(x)$□$[-1$□$1]$□□□□□□□□□□□□□□ $M$□a□□ $m$□a□□□ $M$□a□$-m$□a□□

□II□□ $b\in R$□□ $|f(x)+b|\leqslant 3$□$x\in[-1$□$1]$□□□□□ $3a+b$□□□□□□

□□□□□□□I□ $f(x)=x^2+3|x-a|=\begin{cases}x^2-3x+3a, x<a\\ x^2+3x-3a, x\geqslant a\end{cases}$□

① □$a\geqslant 1$□□ $f(x)=x^2-3x+3a$□$x\in[-1$□$1]$□□□□□□ $M$□a□$=f(-1)=4+3a$□

$m$□a□$=f$□1□$=-2+3a$□□□ $M$□a□$-m$□a□$=6$□

② □$a\leqslant -1$□□ $f(x)=x^2+3x-3a$□$x\in[-1$□$1]$□□□□□

□$M$□a□$=f$□1□$=4-3a$□$m$□a□$=f(-1)=-2-3a$□□□ $M$□a□$-m$□a□$=6$□

③ □$-1<a<1$□□ $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+3a, -1\leqslant x<a\\ x^2+3x-3a, a\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$□

□□ $f(x)$ □ $x\in[-1$□$a]$ □□□□□ $x\in[a$□$1]$ □□□□□

□ $m$□a□ $=f$□a□ $=a^2$ □ $M$□a□ $=\max\{f(-1)$□$f$□1□$\}=\max\{4+3a$□$4-3a\}=4+|3a|$ □

□□ $M$□a□ $-m$□a□ $=4+|3a|-a^2$ □

□□ $M$□a□ $-m$□a□ $=\begin{cases}6, & a\le -1\\ 4+|3a|-a^2, & -1<a<1\\ 6, & a\ge 1\end{cases}$ □

□II□□□□□□ $-3-b\le f(x)\le 3-b$ □□□I□□

① □ $a\ge 1$ □□□ $\begin{cases}4+3a\le -b+3\\ -2+3a\ge -b-3\end{cases}$ □

□ $\begin{cases}3a+b\le -1\\ 3a+b\ge -1\end{cases}$ □□□ $3a+b=-1$ □

② □ $a\le -1$ □□□ $\begin{cases}4-3a\le -b+3\\ -2-3a\ge -b-3\end{cases}$ □

□ $\begin{cases}b-3a\le -1\\ b-3a\ge -1\end{cases}$ □□□ $b-3a=-1$ □□□ $3a+b\le -7$ □

③ □ $-1<a<1$ □□□ $m$□a□ $=f$□a□ $=a^2$ □ $\begin{cases}4+|3a|\le -b+3\\ a^2\ge -b-3\end{cases}$ □□ $-a^2-3\le b\le -|3a|-1$ □

□□ $-a^2+3a-3\le 3a+b\le 3a-|3a|-1$ □

□ $-1<a<1$ □ $-a^2+3a-3>-7$ □ $3a-|3a|-1\le -1$ □□□ $-7<3a+b\le -1$ □

□□ $3a+b\leqslant -1$ □

11□□□ $f(x)=\frac{1}{3}x^3+|x-a|(x\in R,a\in R)$ □

□1□□□ $f(x)$ □ $R$ □□□□□□ $a$ □□□□□

□2□□□□ $f(x)$ □ $R$ □□□□□

①□ $f(x)$ □ $x\in[-1$ □ $1]$ □□□□□□□□□□□□ $M$ □a□□ $m$ □a□□□ $M$ □a□ $-$ $m$ □a□□

②□ $b\in R$ □□ $|f(x)+b|\leqslant\frac{2}{3}$ □□□□□ $x\in[-1$ □ $1]$ □□□□□ $a-b$ □□□□□□

□□□□□□1□□□ $f(x)=\frac{1}{3}x^3+|x-a|$ □

□ $x\geqslant a$ □□ $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x-a$ □ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □□□

□ $x<a$ □□ $f(x)=\frac{1}{3}x^3+a-x$ □ $f'(x)=x^2-1$ □

□□□□□ $a\leqslant -1$ □□ $f'(x)>0$ □ $x<a$ □□□□

□ $a$ □□□□□□ $(-\infty$ □ $-1]$ □

□2□①□ $f(x)$ □□ $R$ □□□□□□□ $a>-1$ □

□ $a\geqslant 1$ □□ $f(x)=\frac{1}{3}x^3+|x-a|=\frac{1}{3}x^3+a-x$ □

$f'(x)=x^2-1$ □ $f'(x)\leqslant 0$ □ $f(x)$ □ $[-1$ □ $1]$ □□□

□□ $f(-1)$ □□□□□□ $f$ □1□□□□□□□

□□ $M$ □a□ $=a+\frac{2}{3}$ □ $m$ □a□ $=a-\frac{2}{3}$ □□ $M$ □a□ $-$ $m$ □a□ $=\frac{4}{3}$ □

□ $a=\frac{1}{3}$ □□ $f(x)$ □ $[-1$ □ $\frac{1}{3}]$ □□□ $[\frac{1}{3}$ □ $1]$ □□□

□ $f(x)$ □□□□□ $\frac{1}{81}$ □□□□□1□

□ $-1<a<\frac{1}{3}$ □□ $f(x)$ □ $[-1$ □ $a]$ □□□ $[a$ □ $1]$ □□□

$f(-1)=-\frac{1}{3}+|-1-a|=-\frac{1}{3}+a+1=a+\frac{2}{3}$ □ $f$ □1□ $=\frac{1}{3}+|1-a|=\frac{1}{3}+1-a=\frac{4}{3}-a$

□□ $f(-1)<$ □1□□

□ $f(x)$ □□□□□ $f$ □a□ $=\frac{1}{3}a^3$ □□□□□ $\frac{4}{3}-a$ □

□ $\frac{1}{3}<a<1$ □□ $f(x)$ □ $[-1$ □ $a]$ □□□ $[a$ □ $1]$ □□□

□□ $f(-1)>$ □1□□

□ $f(x)$ □□□□□ $f$ □a□ $=\frac{1}{3}a^3$ □□□□□ $a+\frac{2}{3}$ □

□□□□□ $M$ □a□ $-m$ □a□ $=\begin{cases}\frac{4}{3}-a-\frac{1}{3}a^3, & -1<a\leqslant\frac{1}{3}\\ a+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a^3, & \frac{1}{3}<a<1\\ \frac{4}{3}, & a\geqslant 1\end{cases}$ □

② □ $b\in R$ □□ $|f(x)+b|\leqslant\frac{2}{3}$ □□□□□ $x\in[-1$ □ $1]$ □□□□

□□ $-\frac{2}{3}\leqslant f(x)+b\leqslant\frac{2}{3}$ □□□□□□ $x\in[-1$ □ $1]$ □□□□

□ $a\geqslant 1$ □□ $-\frac{2}{3}\leqslant b+a-\frac{2}{3}$ □□ $\frac{2}{3}\geqslant b+a+\frac{2}{3}$ □

□□ $a+b=0$ □□ $b=-a$ □ $a-b$ □□□□ $[2$ □ $+\infty)$ □

□ $-1<a\leqslant\frac{1}{3}$ □□□□ $-\frac{2}{3}\leqslant b+\frac{1}{3}a^3$ □□ $\frac{2}{3}\geqslant b+\frac{4}{3}-a$ □

□□ $-\frac{55}{81}\leqslant b\leqslant-\frac{1}{3}$ □□□ $a-b$ □□□□ $(\frac{2}{3}$ □ $\frac{82}{81}]$ □

□$\frac{1}{3}<a<1$□□□□$-\frac{2}{3}\leqslant b+\frac{1}{3}a^3$□□$\frac{2}{3}\geqslant b+a+\frac{2}{3}$□

□□$-1<b<-\frac{1}{3}$□□□$a-b$□□□□$(\frac{2}{3}$□$2]$□

□□□□$a-b$□□□□$(\frac{2}{3}$□$+\infty)$□

12□□□$f(x)=x^2+2|x-a|+a(a\in R)$□□$x\in[-2$□$2]$□□□□□□$M$□a□□□□□□$m$□a□□

□1□□$g$□a□$=M$□a□$-m$□a□□

□2□□$b\in R$□□$[f(x)+b]^2\leqslant 36$□$x\in[-2$□$2]$□□□□□$a+b$□□□□□

□□□□□□1□$f(x)=x^2+2|x-a|+a=\begin{cases}x^2+2x-a, x\geqslant a\\ x^2-2x+3a, x<a\end{cases}$□

① □$a\geqslant 2$□□□$x\in[-2$□$2]$□□

$f(x)=x^2+2|x-a|+a=x^2-2x+3a$□

$M$□a□$=f(-2)=4+4+3a=8+3a$□

$m$□a□$=f$□1□$=3a-1$□

$g$□a□$=M$□a□$-m$□a□$=9$□

② □$1\leqslant a<2$□□

$f(x)$□$[1$□$2]$□□□□□□$[-2$□$1]$□□□□□

□$f$□1□$=3a-1$□$f(-2)=4+4+3a=8+3a$□

$f$□2□$=8-a$□

□$M$□a□$=f(-2)=4+4+3a=8+3a$□

$m$□a□$=f$□1□$=3a-1$□

□$g$□a□$=M$□a□$-m$□a□$=9$□

③当 $0\leqslant a<1$ 时，

$f(x)$ 在 $[a,2]$ 上单调递增，在 $[-2,a]$ 上单调减，

且 $f(a)=a^2+a$，$f(-2)=4+4+3a=8+3a$，

$f(2)=8-a$；

故 $M(a)=f(-2)=4+4+3a=8+3a$，

$m(a)=f(a)=a^2+a$；

则 $g(a)=M(a)-m(a)=-a^2+2a+8$；

④当 $-1<a<0$ 时，

$f(x)$ 在 $[a,2]$ 上单调递增，在 $[-2,a]$ 上单调减，

且 $f(a)=a^2+a$，$f(-2)=4+4+3a=8+3a$，

$f(2)=8-a$；

故 $M(a)=f(2)=8-a$，

$m(a)=f(a)=a^2+a$；

则 $g(a)=M(a)-m(a)=-a^2-2a+8$；

⑤当 $-2<a\leqslant -1$ 时，

$f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上单调递增，在 $[-2,-1]$ 上单调减，

且 $f(-1)=1-2-a=-1-a$，$f(-2)=4+4+3a=8+3a$，

$f(2)=8-a$；

□$M$□a□$=f$□2□$=8-a$□

$m$□a□$=f(-1)=1-2-a=-1-a$□

□$g$□a□$=M$□a□$-m$□a□$=9$□

⑥□$a\leq -2$□□□$x\in[-2$□$2]$□□

$f(x)=x^2+2|x-a|+a=x^2+2x-a$□

$M$□a□$=f$□2□$=8-a$□

$m$□a□$=f(-1)=-a-1$□

$g$□a□$=M$□a□$-m$□a□$=9$□

□□□□□$g$□a□$=\begin{cases}9, a\leq -1 □ a\geq 1\\ -a^2-2a+8, -1<a<0\\ -a^2+2a+8, 0\leq a<1\end{cases}$□

□2□$[f(x)+b]^2\leq 36$□□□$-b-6\leq f(x)\leq -b+6$□

□$[f(x)+b]^2\leq 36$□$x\in[-2$□$2]$□□□□□□$-b-6\leq f(x)\leq -b+6$□$x\in[-2$□$2]$□□□□

①$a\geq 1$□□$M$□a□$=f(-2)=4+4+3a=8+3a$□$m$□a□$=f$□1□$=3a-1$□

□$-b-6\leq 3a-1$□□$8+3a\leq -b+6$□

□□□□□$a+b\leq -2a-2\leq -4$□

②□$0\leq a<1$□□$M$□a□$=f(-2)=4+4+3a=8+3a$□$m$□a□$=f$□a□$=a^2+a$□

□$-b-6\leq a^2+a$□□$8+3a\leq -b+6$□

□$-7<a+b\leq -2$□

③□$-1<a<0$□□$M$□a□$=f$□2□$=8-a$□$m$□a□$=f$□a□$=a^2+a$□

□$-b-6\leqslant a^2+a$□□$8-a\leqslant -b+6$□

□$-7<a+b<-2$□

④□$a\leqslant -1$□□$M$□a□$=f$□2□$=8-a$□$m$□a□$=f(-1)=-a-1$□

□$-b-6\leqslant -a-1$□□$8-a\leqslant -b+6$□

□$b+a\leqslant -4$□

□□□□□$b+a\leqslant -2$□

13□□□□□$f(x)=x^2-2x|x-a|(|a|\leqslant 1)$

□1□□$a=1$□□□$f(x)$□□□□□□□

□2□□$f(x)$□$x\in[-1$□$1]$□□□□□□$M$□a□□□□□□$m$□a□□□$M$□a□$-m$□a□$\leqslant 4$□□□□$a$□□□□□□

□□□□□□1□□$a=1$□□ $f(x)=x^2-2x|x-1|=\begin{cases}3x^2-2x,x<1\\-x^2+2x,x\geqslant 1\end{cases}$□

□ $y=3x^2-2x$□□□□□□□□□□$x=\frac{1}{3}$□□□□□□□□□

$\therefore$□$x<1$□□□□$f(x)$□$[\frac{1}{3}$□$1)$□□□□

$y=-x^2+2x$□□□□□□□□□□$x=1$□□□□□□□□□

$\therefore$□$x\geqslant 1$□□□□$f(x)$□□□□□

□□□□□$a=1$□□□$f(x)$□□□□□□□□$[\frac{1}{3}$□$1)$□

□2□□□ $f(x)=x^2-2x|x-a|=\begin{cases}3x^2-2ax,x<a\\-x^2+2ax,x\geqslant a\end{cases}$□

□$-1\leqslant a\leqslant 0$□□

当 $x<a$ 时，$y=3x^2-2ax$ 的图象是开口朝上且以 $x=\frac{1}{3}a\geq a$ 为对称轴的抛物线，函数 $f(x)$ 为减函数；

当 $x\geq a$ 时，$y=-x^2+2ax$ 的图象是开口朝下且以 $x=a$ 为对称轴的抛物线，函数 $f(x)$ 为减函数；

故 $f(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 上的最大值为 $M$(a) $=f(-1)=3+2a$，最小值为 $m$(a) $=f$(1) $=-1+2a$，

此时 $M$(a) $-m$(a) $=4\leq 4$ 恒成立，

当 $a>0$ 时，

当 $x<a$ 时，$y=3x^2-2ax$ 的图象是开口朝上且以 $x=\frac{1}{3}a<a$ 为对称轴的抛物线，函数 $f(x)$ 在 $[-1,\frac{1}{3}a]$ 上为减函数，在 $[\frac{1}{3}a,a]$，为增函数；

当 $x\geq a$ 时，$y=-x^2+2ax$ 的图象是开口朝下且以 $x=a$ 为对称轴的抛物线，函数 $f(x)$ 为减函数；

由 $f(\frac{1}{3}a)=-\frac{1}{3}a^2$，$f$(1) $=-1+2a$，

若 $0<a\leq 2\sqrt{3}-3$，$f$(1) $\leq f(\frac{1}{3}a)$，

故 $f(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 上的最大值为 $M$(a) $=f(-1)=3+2a$，最小值为 $m$(a) $=f$(1) $=-1+2a$，

此时 $M$(a) $-m$(a) $=4\leq 4$ 恒成立，

若 $2\sqrt{3}-3<a\leq 1$，$f$(1) $>f(\frac{1}{3}a)$，

故 $f(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 上的最大值为 $M$(a) $=f(-1)=3+2a$，最小值为 $m$(a) $=f(\frac{1}{3}a)=-\frac{1}{3}a^2$，

此时 $M$(a) $-m$(a) $\leq 4$ 无解，

综上所述，$-1\leq a\leq 2\sqrt{3}-3$

14. 已知函数 $f(x)=|x^2-1|-ax-1(a\in R)$

(1) 若关于 $x$ 的方程 $f(x)+x^2+1=0$ 在区间 $(0,2]$ 上有两个不同的解 $x_1$，$x_2$

① 求 $a$ 的取值范围；

②□$x_1 < x_2$□□$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$□□□□□

□2□□□□$f(x)$□□□$[0$□$2]$□□□□□□□□□□□□$M$□a□□$m$□a□□□$g$□a□$=M$□a□$-m$□a□□□□□□

□□□□□□1□□ $f(x)+x^2+1=0$□$x\in(0$□$2]$□

□ $a=|x-\frac{1}{x}|+x=\begin{cases}\frac{1}{x},0<x\leqslant 1\\ 2x-\frac{1}{x},1<x\leqslant 2\end{cases}$ □

① □□□□ $y=\begin{cases}\frac{1}{x},0<x\leqslant 1\\ 2x-\frac{1}{x},1<x\leqslant 2\end{cases}$ □□□

□□□$y$□□□□□1□□□□□ $4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$□

□□□$(0$□$2]$□□□□□□□□□□□□□ $1<a\leqslant\frac{7}{2}$□

□$a$□□□□□□ $(1,\frac{7}{2})$□

② $x_1<x_2$□ $a=\frac{1}{x_1}$□ $a=2x_2-\frac{1}{x_2}$□

□□ $\frac{1}{x_1}=2x_2-\frac{1}{x_2}$ □□ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2x_2$□

□$1<x_2\leqslant 2$□$\therefore\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2x_2\in(2$□$4]$□

□$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$□□□□□□$(2$□$4]$□

□2□ $f(x)=\begin{cases}-x^2-ax,0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2-ax-2,1<x\leqslant 2\end{cases}$□

□$a\geqslant 4$□□□$-\frac{a}{2}<0$□$\frac{a}{2}\geqslant 2$□$f(x)$□$[0$□$2]$□□□□□□

□$g$□a□$=f(0)-$ □2□$=2a-2$□

□$2\leq a<4$□□□ $-\frac{a}{2}<0$ □ $1\leq\frac{a}{2}<2$ □ $f(x)$ □$[0$□$\frac{a}{2}]$□□□□□□□$[\frac{a}{2}$□$2]$□□□□□□

□□$m$□a□$=f(\frac{a}{2})=-2-\frac{a^2}{4}$□$M$□a□$=max\{f(0)$□$f$□2□$\}=0$□

□$g$□a□$=\frac{a^2}{4}+2$

□$0\leq a<2$□□□ $-\frac{a}{2}<0$ □ $0\leq\frac{a}{2}<1$ □ $f(x)$ □$[0$□$1]$□□□□□□□$[1$□$2]$□□□□□□

□□$m$□a□$=f$□1□$=-1-a$□$M$□a□$=max\{f(0)$□$f$□2□$\}=\begin{cases}2-2a,0\leq a<1\\0,1\leq a<2\end{cases}$□

□$g$□a□$=\begin{cases}3-a,0\leq a<1\\a+1,1\leq a<2\end{cases}$□

□$-2<a<0$□□□ $0<-\frac{a}{2}<1$ □ $\frac{a}{2}<0$ □ $f(x)$ □$[0$□$-\frac{a}{2}]$□□□□□□$[-\frac{a}{2}$□$1]$□□□□□□

□$[1$□$2]$□□□□□□

□□$m$□a□$=min\{f(0)$□$f$□1□$\}=\begin{cases}1-a,-1<a<0\\0,-2<a\leq-1\end{cases}$□

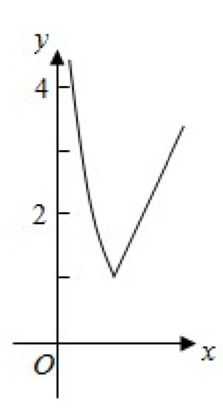
$M$□a□$=max\{f(-\frac{a}{2})$□$f$□2□$\}=2-2a$□

□$g$□a□$=\begin{cases}3-a,-1<a<0\\2-2a,-2<a\leq-1\end{cases}$□

□$a\leq-2$□□□ $-\frac{a}{2}\geq1$ □ $\frac{a}{2}<0$ □ $f(x)$ □$[0$□$2]$□□□□□□

□$g$□a□$=f$□2□$-f(0)=2-2a$□

$$g(a)=\begin{cases} 2-2a, & a\le -1 \\ 3-a, & -1<a\le 1 \\ a+1, & 1<a\le 2 \\ 2+\dfrac{a^2}{4}, & 2<a\le 4 \\ 2a-2, & a>4 \end{cases}$$


y
4
2
O
x